6 dạng bài tập Căn bậc hai, Phương trình bậc hai số phức trong đề thi Đại học có lời giải

**Dạng 1: Tìm căn bậc hai của số phức**

**1. Phương pháp giải**

Cho số phức z= a + bi, ( a,b ∈ R). Tìm căn bậc hai của số phức z.

Gọi ω = c + di, ( c,d ∈ R ) là căn bậc hai của z.

Suy ra: z=ω 2 ⇒ a + bi = ( c + di)2

⇒ a + bi= c2 + 2cdi – d2

⇒ ( a – c2 + d2) + ( b – 2cd)i = 0

+ Từ đó , ta có hệ phương trình:



Giải hệ phương trình trên ta được c và d. Từ đó, suy ra căn bậc hai của z.

**2. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Tìm các căn bậc 2 của z = – 5 + 12i

A. 2 + 3i và – 2 - 3i     B. 1 + 4i và – 1- 4i

C. 2- 3i và – 2 + 3i     D. 3 – 4i và -3 + 4i

Lời giải: Gọi = a + bi, là căn bậc hai của số phức z

Suy ra: (a + bi)2 = - 5 + 12i

⇒ a2 + 2abi- b2 = - 5 + 12i

⇒ (a2- b2 + 5) + (2ab – 12) i =0

Từ phương trình trên ta có hệ phương trình :



Rút b từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất, ta có:



Hệ này có 2 nghiệm: (2; 3) và ( -2; -3).

Vậy số phức z có 2 căn bậc hai là 2 + 3i và – 2- 3i.

Chọn A

**Ví dụ 2:** Gọi z là căn bậc hai của số phức ω = 4 + 6√5i . Tìm mô đun của z?

A. 3     B. 4     C. √14     D.√10

Lời giải: Gọi z = x + yi, (x,y∈ R) là một căn bậc hai của ω

Khi đó ta có:

(x + yi)2 = 4 + 6√5i
⇒ x2 + 2xyi - y2 = 4 + 6√5i

⇒(x2 - y2-4) + (2xy - 6√5)i =0

⇔ 

Giải hệ phương trình tìm được nghiệm:

⇔

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: z1 = 3 + i√5; z2 = -3 -i√5

|z1 | = |z2| = √14

Chọn C

**Ví dụ 3:** Cho số phức z =  .
Gọi ω = a + bi ( a,b ∈ R) là căn bậc hai của số phức z. Tính P= a2 + b2 ?

A. ±3     B. ±√10     C. ±√5     D. ±√13

Ta có: z =  = 
=  = -1 + 3i

Do ω = a + bi ( a,b ∈ R) là căn bậc hai của số phức z.

⇒ ( a + bi)2 = -1 + 3i

⇔ a2 + 2abi – b2 + 1 – 3i = 0

⇔( a2 – b2 + 1) + ( 2ab – 3) =0

Từ đó ta có hệ phương trình sau:

 ⇔

⇔ ⇔ 

Chọn B

**Ví dụ 4:** Gọi ω = 2 + ai ( a ∈ R) là một căn bậc hai của số phức z= b + 12i; (b ∈ R) . Tính a + b?

A.-1     B. 1     C. – 2     D. 3

Do ω = 2 + ai là một căn bậc hai của số phức z = b + 12i nên ta có:

( 2 + ai)2 = b + 12i

⇔ 4 + 4ai- a2 = b + 12i

⇔ (4 – a2 – b) + ( 4a – 12)i =0

Từ đó ta có hệ phương trình sau:



Do đó, a + b = 3 + (-5) = - 2.

Chọn C.

**Dạng 2: Giải phương trình bậc hai trên tập số phức**

**1. Phương pháp giải**

Cho phương trình bậc hai ax2 + bx + c = 0; (a,b,c ∈ R a≠0 ) . Xét Δ = b2 - 4ac , ta có

• ∆ =0 phương trình có nghiệm thực : x = -b/2a

• ∆ > 0 phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi : x1,2 = 

• ∆ < 0 phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi : x1,2 = 

Chú ý:

\* Có thể dùng biệt thức ∆’= b’2 – ac (với b= 2b’)

Khi đó nghiệm của phương trình bậc hai đã cho được xác định bởi công thức:
x1,2 = 

**2. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Nghiệm của phương trình z2 - 2z + 7 =0 trên tập số phức là:

A. z = 1±√6i     B. z = 1±2√2i

C. z = 1±√7i     D.z = 1±√2i

Lời giải: Ta có: ∆’= b’2 – ac = (-1)2 – 7.1 = - 6 < 0

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm phức: z = 1 + √6i và z = 1-√6i

Chọn A.

**Ví dụ 2:** Gọi z0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình 2z2 – 6z + 5 =0. Tìm i.z0?

A. iz0 =          B. iz0 = 

C. iz0 =          D. iz0 = 

Lời giải: Xét phương trình: 2z2 – 6z + 5= 0

Có ∆’= (-3)2 – 2. 5 = -1

Phương trình đã cho có hai nghiệm phức là : 

Do đó, nghiệm z0 có phần ảo âm là
z0 = z2 = 

Do đó : i.z0 = ( ).i = 

Chọn B.

**Ví dụ 3:** : Gọi z1 và z2 là các nghiệm của phương trình z2 – 4z + 9= 0. Gọi M, N là các điểm biểu diễn của z1 và z2 trên mặt phẳng phức. Khi đó độ dài của MN là:

A. MN = 4    B. MN = 5

C. MN = 2√5     D. MN = √5

Xét phương trình z2 – 4z + 9=0

⇔ z2 – 4z + 4 =- 5 ⇔ ( z-2)2 = 5i2

⇔ 

Khi đó, tọa độ hai điểm M và N biểu diễn hai số phức z1, z2 là M(2;√5);N(2;-√5) .

⇒ MN =  = 2√5

Chọn C.

**Ví dụ 4:**. Kí hiệu z0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình 4z2 – 16z + 17 = 0 . Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức w= i.z0 ?

A. M( ;2).    B. M(-  ;2)

C. M( ;2).    D. M(-  ;2).

Lời giải: Xét phương trình: 4z2 – 16z + 17 = 0 có ∆’= 82 – 4. 17= - 4= (2i)2.

Phương trình có hai nghiệm
z1 = 2-  ; z2 = 2 +  .

Do z0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên z0 = z2 = 2 +  .

Ta có w= i.z0 = (2 + ).i = -1⁄2 + 2i

Điểm biểu diễn số phức w là M(-  ;2)

.

Chọn B.

**Dạng 3: Giải phương trình bậc cao trên tập số phức**

**1. Phương pháp giải**

+ Biến đổi phương trình về dạng phương trình tích, trong đó mỗi nhân tử là phương trình bậc nhất hoặc bậc hai. Chú ý sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

+ Dùng phương pháp đặt ẩn phụ.

+ Với phương trình trùng phương bậc bốn:
az4 + bz2 + c=0(a ≠ 0) Đặt t = z2 .

+ Nhẩm nghiệm, phép chia đa thức cho đa thức....

**2. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Cho phương trình sau:
z3 - 3( 1 + 2i).z2 + ( -3 + 8i)z + 5 – 2i =0. Tính tổng các nghiệm của phương trình trên ?

A. 2 + 5i     B. -3 + 6i     C. 3 + 6i     D. – 2 + 5i

\* Nhẩm nghiệm: Ta thấy tổng các hệ số của phương trình bằng 0 nên phương trình có nghiệm z=1.

\* Khi đó:
z3 - 3( 1 + 2i).z2 + ( -3 + 8i)z + 5 – 2i =0

z3 - 3(1 + 2i)z2 + (-3 + 8i)z + 5-2i = 0

⇔(z-1)[z2-2(1 + 3i)z + 2i-5]

⇔ 

⇔ 

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : z= 1; z= i và z= 2 + 5i.

Tổng các nghiệm là: 1 + i + 2 + 5i = 3 + 6i

Chọn C

**Ví dụ 2:** Cho phương trình:
z3 + ( 2- 2i).z2 + ( 5 – 4i)z – 10i =0 biết phương trình có nghiệm thuần ảo. Tìm các nghiệm của phương trình đã cho

A. z= -2i, z = 1 - 2i và z = 1 + 2i.

B. z= 2i, z = - 1 + 2i và z = - 1- 2i.

C. z= -1 + i, z = 1 + i và z = - 1- i.

D. Đáp án khác

Đặt z = yi với y ∈ R

Phương trình đã cho có dạng:
(iy)3 + (2i-2)(yi)2 + (5-4i)(yi) – 10i = 0.

⇔ -iy3 – 2y2 + 2iy2 + 5iy + 4y – 10i = 0 = 0 + 0i

Đồng nhất hoá hai vế ta được:



Giải hệ này ta được nghiệm duy nhất
y = 2.

Suy ra phương trình có nghiệm thuần ảo z = 2i.

\* Vì phương trình nhận nghiệm 2i.

⇒ vế trái của phương trình đã cho có thể phân tích dưới dạng:

z3 + (2 – 2i)z2 + (5 – 4i)z – 10i
= (z – 2i)(z2 + az + b) (a, b ∈ R)

đồng nhất hoá hai vế ta giải được a = 2 và b = 5.

⇒ (1)⇔ (z – 2i)(z2 + 2z + 5) = 0 ⇔  ⇔ 

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là z= 2i, z= - 1 + 2i và z= - 1- 2i.

Chọn B.

**Ví dụ 3:**Cho phương trình:
z4 + 2z3 – z2 – 2z + 10 = 0. Biết phương trình có 1 nghiệm phức là z= - 2 + i. Tìm tổng các phần thực của các nghiệm của phương trình đã cho?

A. – 2     B. 2     C. 4     D. – 4

Phương trình trên có 1 nghiệm là
z1 = - 2 + i thì phương trình cũng có nghiệm z2= - 2- i.

Suy ra, z4 + 2z3 – z2 – 2z + 10 = 0

⇔ ( z + 2- i). (z + 2 + i). (z2 + 4z + 5) =0

⇔  ⇔ 

Vậy phương trình trên có 4 nghiệm là :
- 2 + i,- 2 –i, 1 + i và 1- i.

Tổng phần thực của bốn nghiệm của phương trình:

- 2 + (-2) + 1 + 1 = - 2 .

Chọn A.

**Ví dụ 4:** Cho phương trình sau:
(z2 + 3z + 6)2 + 2z.(z2 + 3z + 6) – 3z2 = 0

A.      B. 

C.      D.

Đặt t = z2 + 3z + 6 phương trình đã cho có dạng:

t2 + 2zt – 3z = 0 ⇔ (t – z)(t + 3z) = 0
⇔ 

+ Với t = z ⇔ z2 + 3z + 6 – z = 0
⇔ z2 + 2z + 6 = 0

⇔ 

+ Với t = -3z ⇔ z2 + 3z + 6 + 3z = 0
⇔ z2 + 6z + 6 = 0

⇔ 

Chọn A.

**Ví dụ 5:** Giải phương trình sau
z4 - z3 +  + z + 1 = 0

A. z = 2 + i; z = 2 -i ; z =  ; z =  .

B. z = 1 + i; z = 1-i ; z =  ; z = .

C. z = 1 + 2i; z = 1- 2i ; z =  ; z = .

D. z = 1 + i; z = 1-i ; z = ; z = 

Nhận xét: z = 0 không là nghiệm của phương trình (1) vậy z ≠ 0 .

Chia hai vế phương trình cho z2 ta được: (z2 +  ) - (z-  ) + 
. Khi đó : t2 = z2 +  = 0

Đặt t = z -  . Khi đó :
t2 = z2 +  -2 ⇔ z2 +  = t2 + 2

Phương trình (2) có dạng: t2 – t +  (3)

Δ = 1 - 4. = -9 = 9i2

PT (3) có 2 nghiệm t=  , t=  .

+ Với t=  ta có z -  = 
⇔ 2z2 - (1 + 3i)z -2 = 0 (4)

Có Δ = (1 + 3i)2 + 16
= 8 + 6i = 9 + 6i + i2
= (3 + i)2

PT (4) có 2 nghiệm:
z =  = 1 + i ,
z =  =  .

+ Với t =  ta có : z - ⇔2z2-(1-3i)z-2 = 0 (5)

Có Δ = (1 - 3i)2 + 16 = 8 - 6i = 9 - 6i + i2 = (3-i)2

PT(5) có 2 nghiệm:
z =  ' ,
z == .

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm: z=1 + i; z=1-i ; z= ; z= .

Chọn B.

**Dạng 4: Tính giá trị biểu thức liên quan đến nghiệm của phương trình**

**1. Phương pháp giải**

\* Để tính giá trị của biểu thức liên quan đến nghiệm của phương trình ta cần: xác định các nghiệm của phương trình, sử dụng hệ thức Vi- et, linh hoạt sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ..

\* Hệ thức Vi–ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai az2 + bz + c= 0 có hai nghiệm phân biệt z1; z2 (thực hoặc phức). Ta có hệ thức Vi–ét ; z=  .

**2. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** Gọi z1, z2 là các nghiệm của phương trình z2 + 4z + 5=0. Đặt (1 + z1)100 + (1 + z2)100 . Khi đó

A. ω= 240.i     B.ω=-251     C.ω=251     D.ω=-250i

Ta có: z2 + 4z + 5=0
⇔ z=  .

Suy ra:
ω= (1 + z1)100 + (1 + z2)100
= ( - 1 + i)100 + ( -1- i)100

= [(-1 + i)2]50 + [(-1-i)2]2 = (2i)50 + (-2i)50

= 250.i48.i2 + (-2)50.i48.i2

= 250.1.(-1) + 250.i.(-1)=-252

Chọn B.

**Ví dụ 2:** Kí hiệu z1, z2, z3, z4 là 4 nghiệm phức của phương trình x4 + 2x2 + 4= 0. Tính tổng T bằng |z1| + |z2| + |z3| + |z4|:

A. 2     B.2√2     C. 4     D. 4√2

Xét phương trình: x4 + 2x2 + 4 =0 (\*)

Đặt t= x2, phương trình (\*) trở thành:
t2 + 2t + 4 = 0

⇔  ⇔  .

Giả sử z1,2 là hai nghiệm của phương trình (1) và z3,4 là hai nghiệm của phương trình (2) .

Khi đó |z1| 2 = |z2| 2 =|-1-√3.i| = 2

⇒ |z1| = |z2| = √2 .

Tương tự ta có :
|z3| 2 = |z4| 2 = |-1-√3.i| = 2

⇒ |z3| = |z4| = √2 .

Vậy T = |z1| + |z2| + |z3| + |z4| = 4√2

Chọn D .

**Ví dụ 3:** Cho các số phức a, b,c, z thỏa mãn
az2 + bz + c=0, . Gọi z1, z2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Tính giá trị của P = |z1 + z2|2 + |z1-z2|2 -2( |z1 + z2|)2.

A.P = 2  .        B. P =4  .

C. P =  .        D. P = 0.5 

Giả sử phương trình az2 + bz + c= 0 có hai nghiệm phức z1, z2. Theo hệ thức Vi-et ta có:



Ta có
|z1 + z2|2 + |z1-z2|2
= 2(|z1|2 + |z2|2)

Do đó : |z1 + z2|2 + |z1-z2|2 -2( |z1 + z2|)2

= 2( |z1 + z2|)2-2( |z1-z2|)2

= 4|z1|.|z2| = 4|z1.z2| = 4.

Chọn B

**Ví dụ 4:** Cho các số phức z1 ≠0 ; z2 ≠0 thỏa mãn điều kiện  . Tính giá trị của biểu thức P = 

A.  .     B. √2    C. 2     D.

Theo giả thiết ta có:
 ⇔ 

⇔(2z2 + z1).(z1 + z2)=z1.z2

⇔ 2z2.z1 + 2z22 + z12 + z2.z1-z2.z1 = 0

⇔ 2.z2.z1 + 2z22 + z12 = 0 (\*)

Do z2 ≠ 0 nên ta chia cả hai vế của (\*) cho z2 ta được :



Trong cả hai trường hợp ta có

 = √2

⇒ 

⇒P=√2 +  =

Chọn D

**Ví dụ 5:**Cho hai số phức z1, z2 là các nghiệm của phương trình z2 + 4z + 13= 0.Tính môđun của số phức w = ( z1 + z2 ). i + z1.z2

A.|w| = 3    B. |w| = √185

C.|w| = √153     D. |w| = √17

Xét phương trình z2 + 4z + 13 = 0 có
∆’= 22 – 13 = - 9 = 9i2

Do đó phương trình trên có hai nghiệm là : 

Khi đó:

w = ( z1 + z2 ). i + z1. z2
= ( -2- 3i – 2 + 3i). i + ( -2- 3i). ( -2 + 3i)
= -4i + 13

suy ra: |w| = √(-42 + 132) = √185

Chọn B.

**Dạng 5: Lập phương trình bậc 2 nhận z1, z2 làm nghiệm**

**1. Phương pháp giải**

\* Cho hai số phức z1 và z2 thỏa mãn: 

.

Khi đó,z1, z2 là nghiệm phương trình:
z2 – S.z + P=0

\* Nếu số phức z0 = a + bi; (a,b ∈ R) là nghiệm phương trình A.z2 + Bz + C=0 (\*) thì:

Az02 + Bz0 + C = 0

\* Nếu số phức z0 = a + bi; là nghiệm phương trình A.z2 + Bz + C=0 (\*) thì

z1 = a – bi cũng là nghiệm của phương trình (\*).

**2. Ví dụ minh họa** .

**Ví dụ 1:** Biết phương trình z2 + az + b=0 ,
(a,b ∈ R) có một nghiệm phức là z1= 1 + 2i. Tìm a và b?

A.         B. 

C.         D. 

Do z1 = 1 + 2i là nghiệm nên z2 = 1 -2i cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có:  (1)

Do z1, z2 là nghiệm của phương trình
z2 + az + b= 0 nên theo hệ thức Vi- et ta có:

 (2)

Từ (1) và (2) ta có:  ⇔ 

Chọn D.

**Ví dụ 2:** Biết z1 = 2- i là một nghiệm phức của phương trình z2 + bz + c = 0; (b,c ∈ R) , gọi nghiệm còn lại là z2. Tìm số phức w= bz1 + cz2

A.w= 18 – i    B.w= 18 + i.

C.w= 2- 9i    D.w= 2 + 9i .

Do z1 = 2 – i là một nghiệm phức của phương trình z2 + bz + c = 0; (c,b ∈ R) nên

z2 =2 + i cũng là 1 nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có: z1 = 2 – i là một nghiệm phức của phương trình z2 + bz + c = 0 nên ta có:

( 2- i)2 + b.(2- i) + c=0

⇔ 4 – 4i + i2 + 2b – bi + c = 0

⇔( 3 + 2b + c) – ( 4 + b) i= 0.

⇔  ⇔ 

khi đó:
w= bz1 + c.z2 = -4( 2- i) + 5. (2 + i) = 2 + 9i

Chọn D .

**Ví dụ 3:** . Cho số thực a, b, c sao cho phương trình z3 + az2 + bz + c = 0 nhận z= 1 + i và z = 2 làm nghiệm. Khi đó tổng giá trị a + b + c là:

A. -2.     B. 2.    C. 4.    D. -4.

Phương trình có nghiệm z = 2 nên thay z=2 vào phương trình ta được:

8 + 4a + 2b + c= 0 ( 1) .

Phương trình có nghiệm z= 1 + i nên thay vào phương trình ta được:

(1 + i)3 + a.(1 + i)2 + b( 1 + i) + c= 0

⇔ 1 + 3i + 3i2 + i3 + a. (1 + 2i + i2) + b(1 + i) + c=0

⇔ 1 + 3i – 3- i + 2ai + b + bi + c= 0

⇔( - 2 + b + c) + ( 2 + 2a + b).i = 0

⇔  . (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

⇔  ⇔ 

Suy ra a + b + c= - 2 .

Chọn A.

**Dạng 6: Vận dụng cao**

**1. Ví dụ minh họa**

**Ví dụ 1:** . Cho phương trình z2 – mz + 2m – 1=0 trong đó m là tham số phức. Giá trị của m để phương trình có hai nghiệm z1, z2 thỏa mãn
z12 + z22 là:

A. m=-2-2√2i.     B. m=2 + 2√2i .

C. 2-2√2i     D. 2 ± 2√2i

Theo Viet, ta có:
 ⇔ 

Theo giả thiết ta có:

z12 + z22= -10 ⇔(z1 + z2)2 - 2z1z2 = -10

⇔ m2 - 2( 2m- 1) = - 10

⇔ m2 – 4m + 12= 0

Có ∆’= (-2)2 – 12 = - 8 = 8i2

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm là : 

Chọn D

**Ví dụ 2:** Cho phương trình z2 + mz -6i = 0. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì m có dạng ±(a + bi) (a,b ≠R) . Giá trị a + 2b là:

A. 0    B. 1    C. - 2    D. - 1

Gọi z1, z2 là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo Vi -et, ta có: 

Theo bài cho, tổng bình phương hai nghiệm bằng 5. Ta có:

z12 + z22 = 5 ⇔ (z1 + z22)-2z1.z2 = 5

⇔ m2 + 12i = 5 ⇔ m2 = (3- 2i)2

⇔ m = ± (3-2i)

Do đó,
a= 3; b = - 2 và a + 2b= 3 + 2.(-2) = -1

Chọn D.

**Ví dụ 3:** Cho z1, z2 là hai số phức thỏa mãn
z2 – 4z + 5= 0 . Tính giá trị biểu thức
P= ( z1 – 1)2017 + ( z2 – 1)2017 .

A. P=0    B. P= 21008.     C. P=21009 .    D. P= 2.

Xét phương trình z2 – 4z + 5= 0 có
∆ = 16 – 4.5.1= - 4 = (2i)2.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức:



Suy ra P=( z1 – 1)2017 + ( z2 – 1)2017

=( 1 – i)2017 + ( 1 + i)2017

= (1-i)[(1-i)2]1008 + (1 + i)[(1 + i)2]1008

= (1-i).(-2i)1008 + (1 + i).(2i)1008

= (1-i).(-2i)1008.(i4)252 + (1 + i).(2i)1008(i4)252

= (1-i).21008 + (1 + i).22018
= 21008 + 21008 = 2 1019

Chọn C.